

Аномальные волны в фокусирующем уравнении Дэви-Стюардсона-2: конечнозонный подход.

П.Г. Гриневич¹, П.М. Сантини²

¹Математический институт им Стеклова РАН
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
Автор был поддержан грантом РФФИ №21-11-00331

²Dipartimento di Fisica, Università di Roma "La Sapienza" and Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma

XXXI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике,
19 декабря 2022 года.

П. Г. Гриневич, П. М. Сантини, “Конечнозонный подход в периодической задаче Коши для 2+1-мерных аномальных волн фокусирующего уравнения Дэви-Стюардсона 2.”, *УМН*, 2022, т. 77, №6(468), с. 77-107.

Начало нашего интереса к этой теме связано с задачей о повторяемости аномальных волн.

Повторяемость наблюдалась в экспериментах на поверхности воды [Onorato et al '13], в оптических волокнах [Trillo et al '18], and фоторефрактивных кристаллах [Pierangeli et al. '18].

Последний из упомянутых экспериментов был проведен в Римском университете отчасти для проверки применимости Нелинейного уравнения Шредингера для описания модуляционной неустойчивости в оптических кристаллах. Мы – П.Г. Гриневич и П.М. Сантини выступали в роли теоретической группы

Аномальные волны – специальные решения фокусирующего НУШ

В нашем случае математическая модель аномальных волн – решения фокусирующего Нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = 0 \quad u = u(x, t),$$

со специальными начальными условиями. Данные Коши – малые возмущения неустойчивого фона.

Мы работаем с периодическими по пространственной переменной граничными условиями.

$$u(x + L, t) = u(x, t),$$

и данные Коши имеют вид:

$$u(x, 0) = a + \epsilon v(x), \quad v(x + L) \equiv v(x), \quad |\epsilon| \ll 1,$$

$$v(x) = \sum_{j \geq 1} \left(c_j e^{ik_j x} + c_{-j} e^{-ik_j x} \right), \quad k_j = \frac{2\pi}{L} j, \quad |c_j| = O(1).$$

Линейная теория возмущений.

Неустойчивый фон ($\epsilon = 0$):

$$u_0(x, t) = ae^{2i|a|^2 t}.$$

При этом первые N гармоник возмущения неустойчивы, где

$$N = \left[\frac{|a|L}{\pi} \right]$$

с инкрементами:

$$\sigma_j = |a|k_j \sqrt{4|a|^2 - k_j^2}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

Остальные моды устойчивы.

Начальные данные – малое возмущения неустойчивого фона.

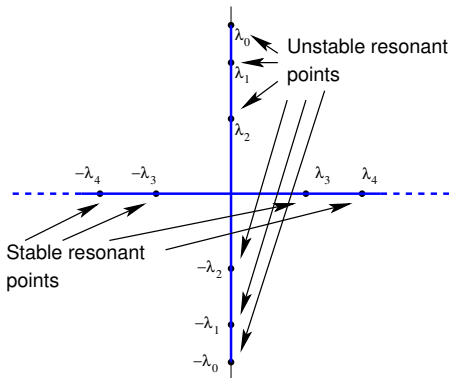
Периодическая задача для НУШ решается с помощью конечнозонного интегрирования. Однако тета-функциональные формулы сложны.

Для специальных данных Коши спектральная кривая (риманова поверхность блоховской функции) близка к рациональной. Для этого случая нами (П.Г. - П.М.С.) были вычислены в главном порядке все ингредиенты тета-функциональных формул – матрица Римана, вектора периодов мероморфных дифференциалов, преобразование Абеля данных Коши, вектор римановых констант.

Оказалось, что получающиеся приближенные решения в элементарных функциях хорошо согласуются с результатами численного счета, при этом теория остается **существенно нелинейной**.

Явные формулы.

Невозмущенная спектральная кривая Γ_0 (для $a = 1$) задается уравнением $\mu^2 = \lambda^2 + 1$.

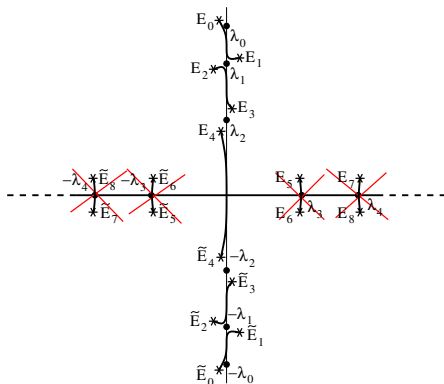


$$\mu_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \lambda_n = \sqrt{\mu_n^2 - 1}, \quad \operatorname{Re} \lambda_n + \operatorname{Im} \lambda_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \infty.$$

Трехэтапное упрощение:

- Шаг 1: Конечнозонное приближение. Мы закрываем бесконечное число зон, отвечающих устойчивым модам, сохраняя только $2N$ зон отвечающих неустойчивым модам;
- Шаг 2. Явная аналитическая аппроксимация всех параметров θ -функциональных решений.
- Шаг 3. Элементарная аппроксимация θ -функций Римана. Поскольку в задаче есть малый параметр ϵ , в каждый момент времени достаточно суммировать лишь по подмножеству набора 4^N точек, являющихся вершинами элементарного гиперкуба в многомерной решетке, содержащего точку траектории. В результате ось времени распадается на интервалы, на каждом из которых решение аппроксимируется $\mathcal{N}(t)$ -солитонными решениям Ахмедиевского типа.

Аппроксимирующая конечнозонная спектральная кривая



Возмущения **вещественных** резонансных точек отвечают **устойчивым** возмущениям начальных условий и мы ими пренебрегаем.

Возмущения **чисто мнимых** резонансных точек отвечают **неустойчивым** модам, и мы их оставляем. Их конечное число.

Нелинейное уравнение Шредингера интегрируемо только в пространственно-одномерном случае. Вопрос о том, насколько одномерное приближение применимо в реальных физических задачах, достаточно деликатен.

Естественно поставить вопрос, что можно сделать в пространственно-многомерном случае.

Пространственно-двумерные бризеры – трудности

- Физически осмысленных интегрируемых систем более чем с одной пространственной переменной не так много.
- В многомерии интегрируемые системы, как правило, нелокальны. Для заданий однозначной динамики нужно накладывать дополнительные ограничения.
- В отличие от одномерного случая, построение спектральной кривой далеко не тривиально (Тайманов, Кричевер).
- Если в одномерном случае спектральные кривые – разветвленные накрытия над поверхностью спектрального параметра, то в двумерном случае возникают поверхности общего вида (впервые это продемонстрировал Кричевер в 1976 году) и нет таких удобных параметров для их описания, как точки ветвления.

Аномальные волны в уравнении Дэви-Стюардсона

Уравнении Дэви-Стюардсона – интегрируемая система в размерности 2+1.

$$\begin{aligned}iu_t + u_{xx} - \nu^2 u_{yy} + 2\eta qu &= 0, \quad \eta = \pm 1, \quad \nu^2 = \pm 1, \\q_{xx} + \nu^2 q_{yy} &= (|u|^2)_{xx} - \nu^2 (|u|^2)_{yy}, \\u = u(x, y, t) \in \mathbb{C}, \quad q &= q(x, y, t) \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

Представление нулевой кривизны

$$\begin{aligned}\nu \vec{\psi}_y &= i\sigma_3 \vec{\psi}_x + U \vec{\psi}, \\ \vec{\psi}_t &= 2i\sigma_3 \vec{\psi}_{xx} + 2U \vec{\psi}_x + V \vec{\psi},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & u \\ -\eta \bar{u} & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -\eta(w - iq) & u_x - i\nu u_y \\ -\eta(\bar{u}_x + i\nu \bar{u}_y) & -\eta(w + iq) \end{bmatrix}, \\ \nu w_y &= (q - |u|^2)_x, \quad w_x = -\nu(q + |u|^2)_y.\end{aligned}$$

Вещественные формы уравнения Дэви-Стюардсона

НУШ:

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = 0, \quad \text{фокусирующий НУШ,}$$

ДС:

$$iu_t + u_{xx} - \nu^2 u_{yy} + 2\eta qu = 0, \quad \eta = \pm 1, \quad \nu^2 = \pm 1,$$

$$q_{xx} + \nu^2 q_{yy} = (|u|^2)_{xx} - \nu^2 (|u|^2)_{yy},$$

$$u = u(x, y, t) \in \mathbb{C}, \quad q = q(x, y, t) \in \mathbb{R},$$

- ДС1: $\nu = i$, спектральная задача – гиперболическая;
- Дефокусирующий ДС2: $\nu = 1, \eta = -1$, спектральная задача – эллиптическая;
- Фокусирующий ДС2: $\nu = 1, \eta = 1$, спектральная задача – эллиптическая.

Для фокусирующего ДС2 с двоякопериодическими граничными условиями можно построить теорию аномальных волн, аналогичную построенной для НУШ (Гриневич–Santini).

В уравнении ДС2 присутствует нелокальный член:

$$q_{xx} + q_{yy} = (|u|^2)_{xx} - (|u|^2)_{yy},$$

при этом функция q определена с точностью до произвольной константы интегрирования

$$q(x, y, t) \rightarrow q(x, y, t) + f(t).$$

К счастью, добавление этой константы эквивалентно калибровочному преобразованию:

$$u(x, y, t) \rightarrow u(x, y, t) \exp\left(-i\frac{\eta}{2} \int^t f(\tau) d\tau\right).$$

Без потери общности можно положить

$$\iint_{T^2} q(x, y, t) dx dy = 0, \quad \text{для всех } t.$$

Периодическая задача для двумерного оператора Дирака 2-D и соответствующие решения ДС2 обсуждались в серии работ Тайманова (частью с С.П. Царевым и Р.М. Матуевым):

- Приложения к геометрии торов в \mathbb{R}^3 и \mathbb{R}^4 ;
- Доказательство существования спектральной кривой с использованием результатов Келдыша;
- Построение сингулярных решений с использованием конформных преобразований \mathbb{R}^4 ;
- Применение преобразований Мутара к построению решений ДС2 .

Мы используем подход к построению спектральной кривой, развитый Кричевером для двумерного оператора Шредингера при одной энергии.

Задача Коши для аномальных волн

Мы рассматриваем следующую задачу Коши:

$$u(x, y, 0) = 1 + \varepsilon v_0(x, y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \ll 1, \\ v_0(x + L_x, y) = v_0(x, y + L_y) = v_0(x, y).$$

Разложим $v_0(x, y)$ в ряд Фурье:

$$v_0(x, y) = \sum_{n_x, n_y \neq (0,0)} c_{n_x, n_y} e^{i(k_x x + k_y y)},$$

где

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L_x}, \quad k_y = n_y \frac{2\pi}{L_y}, \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}.$$

Неустойчивые моды: $k_x^2 + k_y^2 < 4$.

Спектральная кривая получается приклейкой тонких ручек к резонансным парам на плоскости

- 1 Резонансные пары, отвечающие неустойчивым модам $k_x^2 + k_y^2 < 4$:

$$\tau_1 = \frac{k_x + ik_y}{2} \left[-1 \pm i \sqrt{\frac{4 - k_x^2 - k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}} \right], \quad (1)$$

$$\tau_2 = \frac{k_x + ik_y}{2} \left[1 \pm i \sqrt{\frac{4 - k_x^2 - k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}} \right], \quad |\tau_1| = |\tau_2| = 1$$

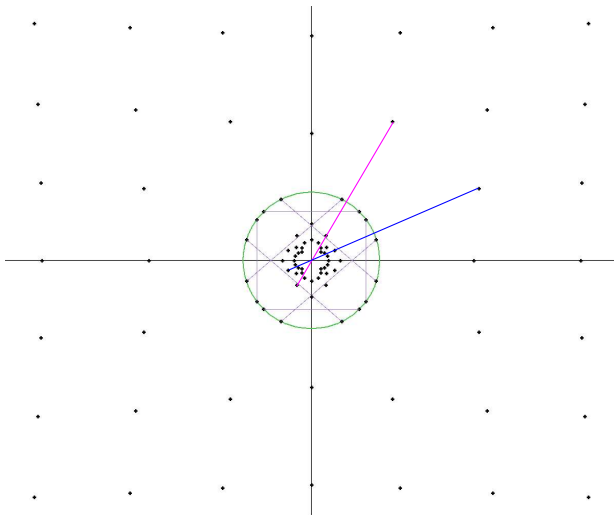
- 2 Резонансные пары, отвечающие устойчивым модам $k_x^2 + k_y^2 > 4$;

$$\tau_1 = \frac{k_x + ik_y}{2} \left[-1 + \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2 - 4}{k_x^2 + k_y^2}} \right], \quad \tau_2 = -\frac{1}{\bar{\tau}_1}. \quad (2)$$

В нашей конечнозонной аппроксимации мы сохраняем лишь ручки, отвечающие неустойчивым модам.

Пример

Пример: Пусть $L_x = 2\pi/1.4$, $L_y = 2\pi/1.2$. Тогда $k_x = 1.4n_x$,
 $k_y = 1.2n_y$:



Циклы на невозмущенной кривой

Базисные циклы на невозмущенной кривой :

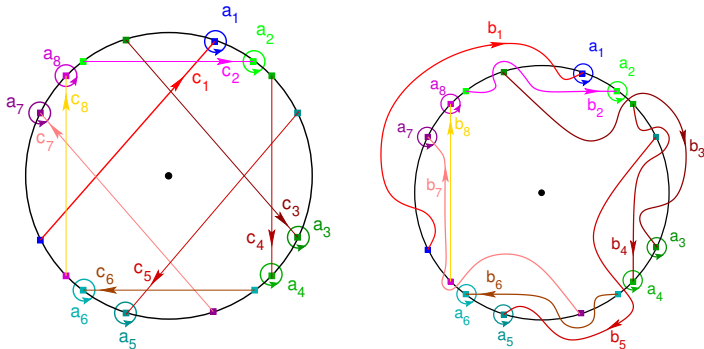


Рис.: Слева: система a и c -циклов для нашего примера. Справа: соответствующие a и b -циклы, где

$$b_j = c_j - \sum_{k>j} (c_j \circ c_k) c_k,$$

Спектральная кривая

Проведем разрезы на τ -плоскости вдоль интервалов (E_{2j-1}, E_{2j}) . Для каждой резонансной пары (τ_{2j-1}, τ_{2j}) склеим разрезы (E_{4j-3}, E_{4j-2}) и (E_{4j-2}, E_{4j}) , причем точка E_{4j-3} приклеивается к E_{4j-1} , а E_{4j-2} к E_{4j} . Циклы a_j – овалы, окружающие разрез (E_{4j-2}, E_{4j}) и ориентированные против часовой стрелки, цикл c_j – объединение интервалов $[E_{4j-3}, 0]$ и $[0, E_{4j-1}]$, циклы b_j определены как и выше.

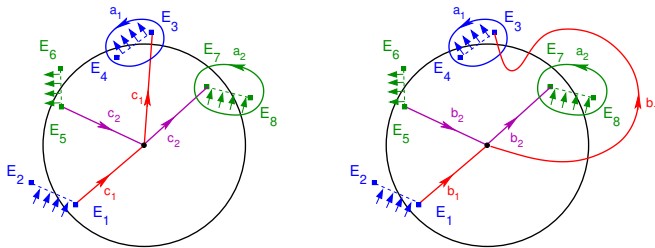


Рис.: Возмущенная кривая. Границы разрезов (E_1, E_2) и (E_5, E_6) к (E_3, E_4) и (E_7, E_8) соответственно.

Прямое спектральное преобразование

Обозначим: $p_k = \text{Re}(\tau_k)$, $q_k = \text{Im}(\tau_k)$, c_j – коэффициент Фурье при гармонике, сопряженной к j -ой,

$$-\alpha_j = \frac{\bar{c}_j + \bar{\tau}_{2j-1}\tau_{2j}c_{-j}}{2q_{2j-1}}, \quad \beta_j = \frac{\bar{c}_{-j} + \bar{\tau}_{2j}\tau_{2j-1}c_j}{2q_{2j}}. \quad (3)$$

Теорема:

$$E_{4j-4+k} = \tau_{2j-1} + (-1)^{k-1} \frac{2\tau_{2j-1}q_{2j}}{i \text{Im}(\tau_{2j}\bar{\tau}_{2j-1})} \varepsilon \sqrt{\alpha_j \beta_j}, \quad (4)$$

$$E_{4j-2+k} = \tau_{2j-1} + (-1)^{k-1} \frac{2\tau_{2j}q_{2j-1}}{i \text{Im}(\tau_{2j}\bar{\tau}_{2j-1})} \varepsilon \sqrt{\alpha_j \beta_j},$$

Теорема: В главном порядке:

$$b_{jj} = \log \left[\varepsilon^2 \frac{\tau_{2j-1}\tau_{2j}q_{2j-1}q_{2j}}{\text{Im}^2(\tau_{2j}\bar{\tau}_{2j-1})(\tau_{2j-1} - \tau_{2j})^2} \alpha_j \beta_j \right],$$

$$b_{jk} = \log \left[\frac{(\tau_{2j} - \tau_{2k})(\tau_{2j-1} - \tau_{2k-1})}{(\tau_{2j} - \tau_{2k-1})(\tau_{2j-1} - \tau_{2k})} \right], \quad k \neq j.$$

$$u(z, t) = \frac{\theta(\vec{A}(\infty_2) + \vec{W}_z z + \vec{W}_{\bar{z}} \bar{z} + \vec{W}_t t - \vec{A}(\mathcal{D}) - \vec{K})}{\theta(\vec{A}(\infty_1) + \vec{W}_z z + \vec{W}_{\bar{z}} \bar{z} + \vec{W}_t t - \vec{A}(\mathcal{D}) - \vec{K})},$$

где

$$[\vec{A}_{E_{4j-3}}(\gamma_j)]_k = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ \log \left[\frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j \beta_j}} \right] & k = j. \end{cases}$$

$$(W_z)_j = \frac{i}{2} [\bar{\tau}_{2j} - \bar{\tau}_{2j-1}], \quad (W_{\bar{z}})_j = \frac{i}{2} [\tau_{2j} - \tau_{2j-1}], \quad (5)$$

$$(W_t)_j = \text{Im}(\tau_{2j-1}^2 - \tau_{2j}^2), \quad (6)$$

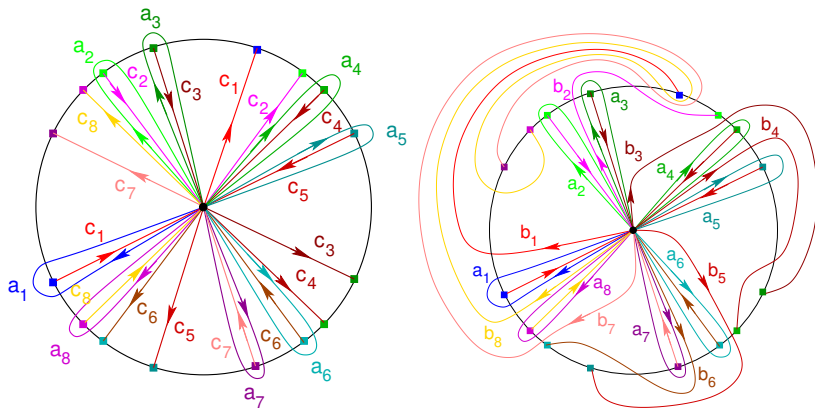
$$A_j(\infty_2) - A_j(\infty_1) = \log \left[\frac{\tau_{2j-1}}{\tau_{2j}} \right] = \log [\tau_{2j-1} \bar{\tau}_{2j}]. \quad (7)$$

$$K_j = \frac{b_{jj}}{2} - \pi i + A_j(E_{4j-3}) + O(\epsilon).$$

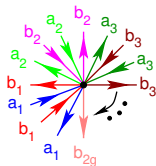
$$A_j(E_{4j-3}) = -\log \left[\epsilon \frac{\tau_{2j} q_{2j}}{i \operatorname{Im}(\tau_{2j} \tau_{2j-1}^{-1})(\tau_{2j-1} - \tau_{2j})} \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right],$$

$$b_{jj} = \log \left[\epsilon^2 \frac{\tau_{2j-1} \tau_{2j} q_{2j-1} q_{2j}}{\operatorname{Im}^2(\tau_{2j} \tau_{2j-1}^{-1})(\tau_{2j-1} - \tau_{2j})^2} \alpha_j \beta_j \right].$$

Базис для вычисления римановых констант:



Он обеспечивает правильный порядок циклов в общей точке:



Pierangeli D., Flammini M., Zhang L., Marcucci G., Agranat A.J., Grinevich P.G., Santini P.M., Conti C., DelRe E. “Observation of Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou recurrence and its exact dynamics”, Physical Review X, 2018, v. 8, issue 4, p. 041017 (9 pages); doi:10.1103/PhysRevX.8.041017.

P.G. Grinevich, P.M. Santini “The exact rogue wave recurrence in the NLS periodic setting via matched asymptotic expansions, for 1 and 2 unstable modes”, Physics Letters A, 2018, v. 382, pp. 973-979; doi:10.1016/j.physleta.2018.02.014.

P.G. Grinevich, P.M. Santini “The finite gap method and the analytic description of the exact rogue wave recurrence in the periodic NLS Cauchy problem. 1”, Nonlinearity, 2018, v. 31, No. 11, pp. 5258–5308; doi:10.1088/1361-6544/aaddcf.

Гриневич П.Г., Сантини П.М. “Фазовые резонансы для повторяемости аномальных волн НУШ в квазисимметричном случае” - Теоретическая и математическая физика, 2018, т. 196, №3, с. 404-418; doi:10.4213/tmf9544.

Гриневич П.Г., Сантини П.М. “Конечнозонный подход в периодической задаче Коши для аномальных волн в нелинейном уравнении Шрёдингера при наличии нескольких неустойчивых мод” - Успехи математических наук, 2019, т. 72, №2(446), с. 27-80; doi:10.4213/rm9863.

P.G. Grinevich, P.M. Santini “Numerical instability of the Akhmediev breather and a finite-gap model of it”,- “Recent Developments in Integrable Systems and Related Topics of Mathematical Physics (Kezenoi-Am, Russia, 2016)”, ed. Viktor M. Buchstaber, Sotiris Konstantinou-Rizos, Alexander V. Mikhailov, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, v. 273, Springer 2019, pp. 3-23.

Coppini F., Grinevich P.G., Santini P.M. “The effect of a small loss or gain in the periodic NLS anomalous wave dynamics. I” - Phys. Rev. E, 2020, v.101, No 3, 032204, 8 pages, - Published 6 March 2020; doi:10.1103/PhysRevE.101.032204.

P.G. Grinevich, P.M. Santini, “The linear and nonlinear instability of the Akhmediev breather”, *Nonlinearity*, **34**:12 (2021), 8331–8358. 