



Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневыхев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

ВОЛНЫ ОТ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ

Одна **ОЧЕНЬ ЛИНЕЙНАЯ** задача

Владимир Гневыхев¹, Сергей Бадулин^{1,2}

¹Институт океанологии П.П. Ширшова
Лаборатория нелинейных волновых процессов

² Сколковский институт наук и технологий

20 декабря 2022, Москва



В этом докладе

- 1 Problem statement
- 2 Метод эталонных решений (Reference Solution Approach)
- 3 Результат: Крест Кельвина
- 4 Выводы и перспективы

Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневыхев,
С.Бадулин

Problem
setup

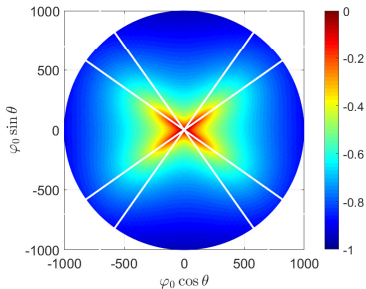
Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References



You are welcome to copy this presentation
badulin.si@ocean.ru



Как смоделировать волны от эллиптического источника конечного размера?

Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневнышев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

Источник имеет размер и форму !!!

Постановки Cauchy (1815) как способ уйти от проблем:

- Начальное локализованное (δ -импульс) состояние (возвышение поверхности для волн на воде);
- Начальный импульс (δ -импульс) на первоначально покоящейся поверхности

Наши постановки для иммитации осциллирующего источника

- Волновое возмущение конечного размера эллиптической формы;
- Волны от неподвижного судна (Thomson, 1887)



Метод решения

Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневыхев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

Мы хотим просто суммировать гармоники

$$f_n(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int F_n(\mathbf{k}) \cdot \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)] \right\} d\mathbf{k} \quad (*)$$

- Задача линейная, можно смотреть как локализованные пакеты так и их суперпозиции;
- Аппроксимируем дисперсионное соотношение параболой и использовать **гауссовы распределения для F_n** . Интеграл (*) берется в явном виде и это снова гауссова функция.
- Мы называем это **Метод Эталонных Решений (Reference Solution Method)**



Чем замечательно гауссово распределение?

Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневышев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

Аппроксимируем дисперсионное соотношение в окрестности максимума распределения (введем *симплектическое многообразие*)

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + \omega'_k \delta k + \omega'_l \delta l + \frac{1}{2} \omega''_{kk} (\delta k^2 + \omega''_{ll} \delta l^2 + 2\omega''_{kl} \delta k \delta l) + \dots$$

Фурье-образ гауссианы есть гауссиана (Fedoryuk, 1994)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \mathbf{B} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - i \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle \right] d\mathbf{x} \\ &= (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{B})^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \right] \end{aligned}$$

\mathbf{B} и \mathbf{B}^{-1} – матрицы квадратичных форм определяют распределения в пространствах координат и волновых векторов



Явные выражения для волновой функции

Волны от источника на глубочайшей воде

В.Гневнышев, С.Бадулин

Problem setup

Эталонные решения

Результат

Заключение

References

References

Можем записать результат в явной форме

$$f_2(x, y, t) = \Psi_2(x, y, t) \cos[\phi(x, y, t)]$$

Введем $\mu_x = (\Delta k)^2 \omega''_{kk}$, $\mu_y = (\Delta k)^2 \omega''_{ll}$, $\mu_{xy} = \Delta k \Delta l \omega''_{kl}$.
Огибающая волнового пакета

$$\Psi_2(x, y, t) = D^{-1/2} \times \exp[-C(\xi_x, \xi_y)/2D^2]$$

с квадратичной формой

$$C(\xi_x, \xi_y) = t^2 [(\xi_x \mu_{xy} - \xi_y \mu_x)^2 + (\xi_y \mu_{xy} - \xi_x \mu_y)^2] + (\xi_x^2 + \xi_y^2),$$

лок. координат $\xi_x = \Delta k(x - c_{gr.x}t)$; $\xi_y = \Delta l(y - c_{gr.y}t)$,

Пакеты – эллипсы, которые могут вращаться в пространстве, стремясь к предельной ориентации



Начальное условие в физическом (слева) и Фурье (справа) пространствах

Волны от источника на глубокой воде

В.Гневыхев,
С.Бадулин

Problem setup

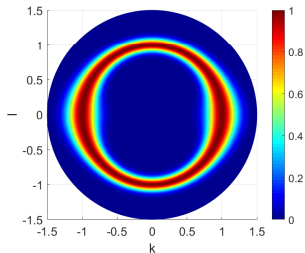
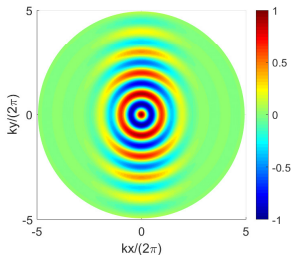
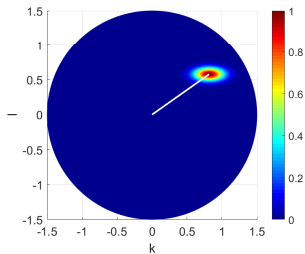
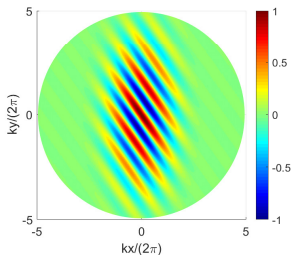
Эталонные решения

Результат

Заключение

References

References





Две постановки: (1) импульс; (2) установившиеся колебания (motionless ship)

Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневыхев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

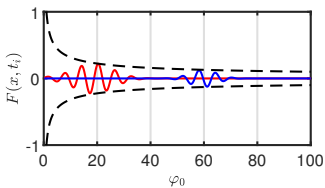
Заключение

References

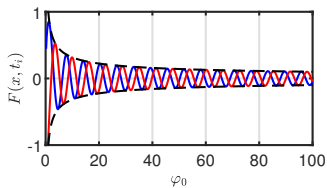
References

à la Cauchy

Motionless ship of Lord Kelvin



Физическое время



Виртуальное время
(расстояние от источника)



Явные выражения для объема пакеты и фазовой функции

Объем пакета D

$$D^2 = |\det \mathbf{B}|^2 = [1 + t^2(\mu_{xy}^2 - \mu_x\mu_y)]^2 + t^2(\mu_x + \mu_y)^2,$$

как в Стац.Фазе

что-то новое

Фазовая функция

$$\phi(x, y, t) = k_0x + l_0y - \omega(k_0, l_0)t - \theta_2(t) - \omega_2(x, y, t).$$

как в Стац.Фазе

почти как

никак

независящий от координат сдвиг

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{(\mu_x + \mu_y)t}{1 + t^2(\mu_{xy}^2 - \mu_x\mu_y)} \right]$$

дает в пределе точечного источника (SPA) $\pm\pi/4$ или 0

Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневешев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References



Как это работает для волн на глубокой воде?

$$\omega = \sqrt{g|\kappa|}$$

Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневыхев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

Удобно записать выражения в терминах фазы

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\omega_0 t$$

Объем пакета $D^2 = (1 + A^2/2)^2 + B^2$

состоит из «старой» изотропной $A = \varphi_0 \frac{\Delta k \Delta l}{\kappa^2}$

и «новой» анизотропной части

$$B = \varphi_0 \left[\left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \theta\right) \left(\frac{\Delta k}{\kappa}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \left(\frac{\Delta l}{\kappa}\right)^2 \right].$$

$\theta_{\kappa_1} = \arccos \sqrt{2/3} \approx 35.26^\circ$ ($\theta_{\kappa_2} = \arcsin \sqrt{2/3} \approx 54.74^\circ$)
есть классический угол Кельвина.

Эллипс генерирует крест !!!



Эллиптический начальный импульс. Огибающая

Размер области $500/\pi$ длин волн.

Волны от источника на глубокой воде

В.Гневешев,
С.Бадулин

Problem setup

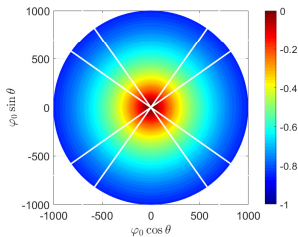
Эталонные решения

Результат

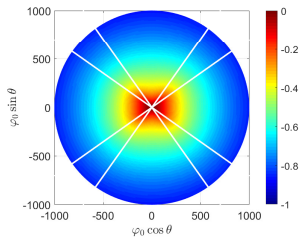
Заключение

References

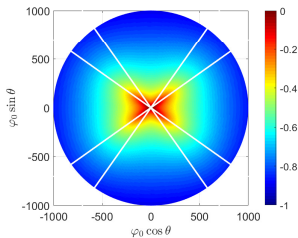
References



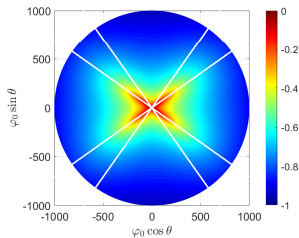
a) $\Delta y / \Delta x = 1$



b) $\Delta y / \Delta x = 2.25$



c) $\Delta y / \Delta x = 4$



d) $\Delta y / \Delta x = 6.25$



Эллиптический начальный импульс. Фаза θ_2

Размер области $500/\pi$ длин волн.

Волны от источника на глубокой воде

В.Гневешев, С.Бадулин

Problem setup

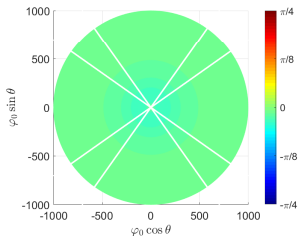
Эталонные решения

Результат

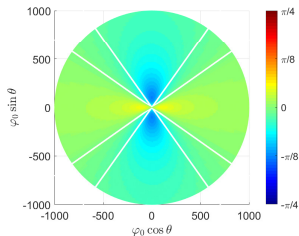
Заключение

References

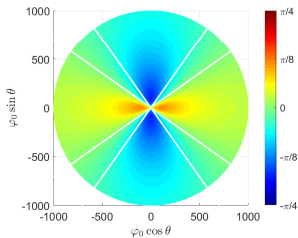
References



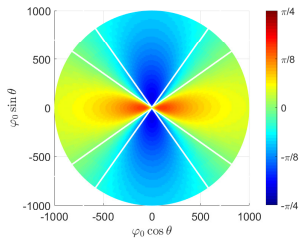
a) $\Delta y / \Delta x = 1$



b) $\Delta y / \Delta x = 2.25$



c) $\Delta y / \Delta x = 4$



d) $\Delta y / \Delta x = 6.25$



Слева – контуры полуширины. Справа – Сравнение с точным интегрированием

Волны от источника на глубокой воде

В.Гневыхев,
С.Бадулин

Problem setup

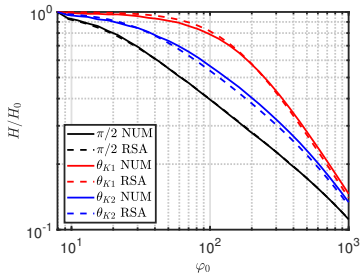
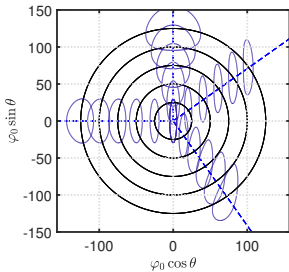
Эталонные решения

Результат

Заключение

References

References



$$\Delta y / \Delta x = 6.25$$



Выводы и перспективы

Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневышев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

- 1 Мы рассмотрели задачу в двух постановках иммитирующих осциллирующий источник;
- 2 Эллиптический осциллирующий источник генерирует сильно анизотропное волновое поле в «ближней» зоне. Анизотропия тем больше, чем больше эксцентриситет эллипса;
- 3 Наш метод позволяет просто работать в ближней зоне, недоступной для метода стац.фазы (или аналогов) что подтверждается сравнением с точным решением.



Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневышев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

Спасибо за внимание



Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневывшев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

CAUCHY, AUGUSTIN-LOUIS 1815 *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, 1, vol. I, chap. Théorie de la propagation des ondes á la surface d'un fluid pesant d'une profondeur indéfinie, prix d'analyse mathématique en 1815, imprimé en 1827 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, pp. 4–318. Gauthier-Villars, 1882.

FEDORYUK, M. V. 1994 *Encyclopedia of Mathematics*, chap. Saddle point method. Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers.

THOMSON, WILLIAM 1887 On ship waves. *Proc. Inst. Mech. Engrs* **38**, 409–434.

FEDORYUK, M. V. 1994 *Encyclopedia of Mathematics*, chap. Saddle point method. Springer / Kluwer .

FLIERL, G. 1977 The application of linear quasigeostrophic dynamics to Gulf Stream Rings. *J. Phys. Oceanogr.* **7**, 365–379.

GNEVYSHEV, V. & BADULIN, S. 2020a Wave patterns of gravity-capillary waves from moving localized sources. *Fluids* **5** (4)_{15 / 15}



Волны от
источника
на глубокой
воде

В.Гневыхев,
С.Бадулин

Problem
setup

Эталонные
решения

Результат

Заключение

References

References

GNEVYSHEV, V. G. & BADULIN, S. I. 2017 On the asymptotics of multidimensional linear wave packets: Reference solutions. *Moscow University Physics Bulletin* **72** (4), 415–423.

GNEVYSHEV, V. G. & BADULIN, S. I. 2020*b* On reference solutions for ship waves. *AIP Advances* **10**, 025014.

KELVIN, LORD 1906 Deep sea ship waves. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **25** (2), 1060–1084.

SVIRKUNOV, P. N. & KALASHNIK, M. V. 2014 Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources. *Physics-Uspokhi* **57** (1).

THOMSON, W. 1887 On ship waves. *Proc. Inst. Mech. Engrs* **38**, 409–434.